

南一學用電子書

全面數位化

連線上網就延續學習

開啟網頁就開始複習

時代來臨



▶ 學用電子書在手，課本、習作通通有！

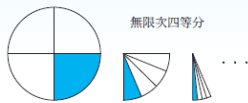
南一學用電子書高中數學選修甲下課本+習作

2



1 數列及其極限

曾有社團「數學愛好者協會」舉辦將圓形蛋糕切成三等分比賽，下圖是優秀獎“無限次四等分”：等分四塊後，三個人各拿一塊，再將藍色部分四等分，三個人再各拿一塊，相同的作法反覆進行下去，每個人都會分到蛋糕的三分之一，這個作法與無窮等比級數求和有關係，涉及無窮數列極限的概念。本節中，將介紹數列的極限及其運算性質、夾擠定理，並從利息問題來認識常數 e 。



無限次四等分

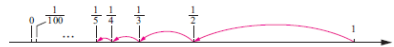
1 數列的極限

在第二冊時，我們將一列數 a_1, a_2, \dots, a_n 依序排列稱為數列，並用符號 $\langle a_n \rangle$ 表示，其中 n 為其項數，對於 $1 \leq n$ 而言， a_n 為此數列的**第 n 項**。因為前述數列的項數是有限的，也稱為**有限數列**；如果列出來的數型如 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 有無窮多個，就稱為**無窮數列**，也用符號 $\langle a_n \rangle$ 表示，對於正整數 n 而言， a_n 為此數列的**第 n 項**。對於無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ，我們關心的是：當 n 愈來愈大時，第 n 項 a_n 是如何變化？

以無窮數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$ 為例，我們依序將各項列出

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \dots$$

並在數線上標出各項對應的位置，如下圖所示。



觀察可知：當 n 愈來愈大時，第 n 項 $\frac{1}{n}$ 的值會愈來愈小而逐漸靠近於 0。

1-1 數列及其極限 3

事實上，我們想要 $\frac{1}{n}$ 的值多靠近 0，只要選擇 n 足夠大，都可以辦到，舉例如下。

- (1) 如果想要 $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{10}$ ，只要選擇 $n > 10^2$ 就可以辦到。
- (2) 如果想要 $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{10^2}$ ，只要選擇 $n > 10^4$ 就可以辦到。
- (3) 如果想要 $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{10^3}$ ，只要選擇 $n > 10^6$ 就可以辦到。

換言之， $\frac{1}{n}$ 與 0 的差距 $|\frac{1}{n} - 0|$ 要多小，我們都能選取出某一項，使得該項以後的所有項與 0 的差距，都能被限制在選定的誤差之內，也就是說，

$\frac{1}{n}$ 的值想要多靠近 0，就可以多靠近。

這時我們稱“無窮數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$ 趨近定值 0。”

這時定值 0 稱為無窮數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$ 的**極限**，用符號

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ 表示。}$$

其中“ \rightarrow ”代表趨近或趨向，符號“ ∞ ”代表無限大。我們將無窮數列的極限定義敘述如下。

無窮數列的極限

給定一個無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ，當 n 愈來愈大時， a_n 會趨近於某一個定值 α ，也就是，只要 n 足夠大， a_n 與 α 的差距要多麼小都可以，此時數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限存在，定值 α 稱為數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限，記為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

滿足上述條件的數列稱為**收斂數列**。反之，當 n 愈來愈大時， a_n 不會趨近於一個定值，則稱無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 為**發散數列**。

要注意的是：無窮數列的極限如果存在，只會有一個。

提供完整課本/習作(不含解答)

方便老師課堂數位教學運用

學生課前預習、課後複習

1 連網即用
免安裝與下載

2 設備不限
軟硬體系統都相容

3 容量不占
不須安裝程式