

南一學用電子書

全面數位化

連線上網就延續學習

開啟網頁就開始複習

時代來臨



▶ 學用電子書在手，課本、習作通通有！

南一學用電子書高中數學第二冊課本+習作

2
1-1 數列與數學歸納法 3

數列與數學歸納法

人們很早就注意到數列這個主題，例如：古埃及《萊因德紙草書》(約公元前1650年抄錄)的問題79就出現右圖書本左頁的象形文字。經過研究，認為這是一道關於等比的問題。本節中，將複習等差數列和等比數列，並從遞迴關係來掌握更多有規律的數列，以及和遞迴關係密切的數學歸納法。

▲ 赫卡特是古埃及的容量單位

1 等差數列與等比數列

將一列數字 a_1, a_2, \dots, a_n 依序排列，就稱為數列，常用符號 $\langle a_n \rangle$ 表示，其中 n 為其項數，對於 $1 \leq i \leq n$ 而言， a_i 為此數列的第 i 項，第一項 a_1 也稱為首項，第 n 項 a_n 常用來表示為一般項，依此類推，例如將小於 100 的正奇數由小到大寫出：1, 3, 5, 7, ..., 99，其中第一項 $a_1=1$ ，第二項 $a_2=3$ ，..., 第 n 項 (一般項) $a_n=2n-1$ ，就將此數列記做 $\langle 2n-1 \rangle$ ，事實上它是國中時學過的等差數列。

若數列 $\langle a_n \rangle$ 中相鄰兩項的後項減去前項的差 d 為定值，也就是

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d,$$

稱此數列為等差數列，定值 d 稱為公差，若等差數列的首項為 a_1 ，公差為 d ，由上式知，此等差數列可寫成

$$\begin{array}{ccccccc} & +d & +d & +d & & & \\ a_1 & a_1+d & a_1+2d & a_1+3d & \dots & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & \end{array}$$

依上頁圖我們可推得第 n 項 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，將上述結果整理如下。

等差數列的一般項
設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1 ，公差為 d ，則其一般項 (第 n 項) 為 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。

例題 1
已知等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 2 項 $a_2=1$ ，第 8 項 $a_8=37$ ，試求首項與公差的值。

解
設公差為 d ，則 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 1, \dots \dots \text{①} \\ a_8 = a_1 + 7d = 37, \dots \dots \text{②} \end{cases}$ ②-① 得 $6d=36$ ，則 $d=6$ ，故公差為 6，代入 ① 式，可得到首項 $a_1=-5$ 。

隨堂練習
已知等差數列的第 5 項為 16，第 13 項為 40，求第 9 項的值。

同樣的，若數列中相鄰兩項的後項與前項的比值為定值，即

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r, (a_1 \neq 0, \text{定值 } r \neq 0)$$

稱此數列為等比數列，定值 r 為公比。若等比數列的首項為 a_1 ，公比為 r ，由上式知，此等比數列可寫成

$$\begin{array}{ccccccc} \times r & \times r & \times r & & & & \\ a_1 & a_1 r & a_1 r^2 & a_1 r^3 & \dots & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & \end{array}$$

依上圖我們可推得第 n 項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ ，將上述結果整理如下。

提供完整課本/習作(不含解答)

方便老師課堂數位教學運用

學生課前預習、課後複習

1 連網即用
免安裝與下載

2 設備不限
軟硬體系統都相容

3 容量不占
不須安裝程式